Functorialidade: $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(M, M')$ e $\alpha' \in \operatorname{Hom}_R(N, N')$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\alpha \times \alpha'"] \arrow[d] & M' \times N' \arrow[d] \\ M \otimes_R N \arrow[r, dashed, "\exists! \alpha \otimes \alpha'"] & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

$$\alpha \otimes \alpha' (m \otimes n) = \alpha(m) \otimes \alpha'(n)$$

Prop: 1. $M \otimes_R N = N \otimes_R M$

2. $R \otimes_R M = M$

3. $(M \otimes_R N) \otimes_R P = M \otimes_R (N \otimes_R P)$

Def: R, R' anéis. Um (R,R')-bimódulo é um grupo ab. N com duas estruturas de módulo

$$R \times N \to N$$
$$R' \times N \to N$$

tq. $x'(xn) = x(x'n) \quad \forall x \in R \ \forall x' \in R'$

Exemplos: 1. Se V é um esp. vet. / $\mathbb{C}$, então V é $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ - bimódulo com

$$\varphi_1 : \mathbb{C} \times V \to V ; \ \varphi_1(z, v) = zv$$
$$\varphi_2 : \mathbb{C} \times V \to V ; \ \varphi_2(z, v) = \bar{z}v$$

2. Se R' é uma R-álgebra e $M \in R'$-mod então M é um (R,R')-módulo.

3. Se $M \in R\text{-mod}$, $N \in R'\text{-mod}$, então

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$$

é um (R, R')-bimódulo com

$$(x\varphi)(m) := \varphi(xm) \quad \forall x \in R \ \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N) \ \forall m \in M$$

$$(x'\varphi)(m) := x'\varphi(m) \quad \forall x' \in R' \ldots$$

4. Se $M \in R\text{-mod}$, $N \in (R, R')\text{-bimod.}$
$P \in R'\text{-mod}$

4.1. $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ é um (R, R')-bimod. com

$$(x'\varphi)(m) := x'\varphi(m)$$

4.2 $\mathrm{Hom}_{R'}(N, P)$ é um (R, R')-bimód. com $(x\varphi)(m) := \varphi(xm)$

5. Se N é um (R,R')-bimod. e M é R-mod, então $M \otimes_R N$ é um (R,R')-bimod. com

$$x'(m \otimes n) := m \otimes (x'n)$$

<u>Teorema</u>: R, R' anéis. $M \in R$-mod, $P \in R'$-mod e $N \in (R,R')$-bimod, então

$$\boxed{M \otimes_R (N \otimes_{R'} P) = (M \otimes_R N) \otimes_{R'} P}$$

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R N, P) = \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{R'}(N,P))}$$

<u>Dem</u>:

1. $M \otimes_R (N \otimes_{R'} P)$ e $(M \otimes_R N) \otimes_{R'} P$ são (R,R')-mod com a mesma prop. univ. relativ/ a aplicações (R,R')-bimódulos Q:

$$M \times N \times P \longrightarrow Q$$

que seja trilinear (i.e. separadamente R-bilinear em $M \times N$ e R'-bilinear em $N \times P$)

2. $\alpha : \mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R N, P) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{R'}(N, P))$

$$\alpha(\varphi)(m)(n) := = \varphi(m \otimes n)$$

Inversa/, se $\eta \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{R'}(N, P))$

$$M \times N \xrightarrow{\tilde{\eta}(n)} P$$

$$(m, n) \longmapsto \eta(m)(n)$$

Cor: Seja R' uma R-álgebra. Temos

(a) Se $M \in R\text{-mod}$, $P \in R'\text{-mod}$, então

$$(M \otimes_R R') \otimes_{R'} P = M \otimes_R P$$

$$\mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', P) = \mathrm{Hom}_R(M, P)$$

(b) Se $M \in R'\text{-mod}$ e $P \in R\text{-mod}$, então

$$\mathrm{Hom}_R(M, P) = \mathrm{Hom}_{R'}(M, \mathrm{Hom}_R(R', P))$$

$$\mathrm{Hom}_R(FM, P) = \mathrm{Hom}_{R'}(M, GP)$$

$\therefore$ 1. $\cdot \otimes_R R'$ (extensão de escalares) é adjunto à esquerda de restrição de escalares

2. $\mathrm{Hom}_R(R', \cdot)$ é adjunto à direita de restrição de escalares

Notação: $\mathrm{Hom}_R(R', \cdot): R\text{-mod} \to R'\text{-mod}$

diz-se co-indução.

Dem: (b)

$$\mathrm{Hom}_R(M, P) = \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R R', P)$$
$$= \mathrm{Hom}_{R'}(M, \mathrm{Hom}_R(R', P))$$

$\square$

Def: Seja R' uma R'-álgebra e

$$F : R\text{-mod} \longrightarrow R'\text{-mod}$$ um funtor.

Dizemos que F é R-linear se

$$F : \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R'}(FM, FN)$$

é $\underline{R\text{-linear}}$.

Exemplos: 1. Se P é (R, R')-bimod, então $M \longmapsto FM := M \otimes_R P \in R'\text{-mod}$ é um funtor R-linear.

2. $\tau: \mathbb{C}\text{-mod} \to \mathbb{C}\text{-mod}$

$V \longmapsto \overline{V} := V$ com a estrutura $(z,v) \mapsto \overline{z}v$

não é $\mathbb{C}$-linear.

<u>NB</u>: Se F é R-linear e $\alpha: M \to N$ $= 0 \Rightarrow F(\alpha) = 0$

$\therefore$ Se $M = \{0\}$ então $F(M) = 0$

pois $F(1_M) = 1_{FM} = 0$.

<u>Teorema de Watts</u>: Seja $F: R\text{-mod} \to R\text{-mod}$ um functor R-linear. Então $\exists$ transf. natural

$$\theta(\cdot): \cdot \otimes_R F(R) \longrightarrow F(\cdot)$$

que satisfaz $\theta(R) = 1$. Mais, θ é isomorfismo sse F preserva limites diretos.

Dem: Se F é R-linear, então define

$$\theta(M) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R,M), \mathrm{Hom}_R(FR,FM))$$
$$= \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(FR,FM))$$
$$= \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R FR, FM)$$

tq. θ define transf. natural e $\theta(R) = 1$

Seja $M \in R\text{-mod}$. Consideremos $R^{\oplus \Sigma} \to R^{\oplus \Lambda} \to M \to 0$ exata. Se F preserva limites diretos, obtem um diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(R^{\oplus \Sigma}) \arrow[r] & F(R^{\oplus \Lambda}) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & 0 \\
R^{\oplus \Sigma} \otimes FR \arrow[r] \arrow[u, "\theta(R^{\oplus \Sigma})"] & R^{\oplus \Lambda} \otimes FR \arrow[r] \arrow[u, "\theta(R^{\oplus \Lambda})"] & M \otimes F(R) \arrow[r] \arrow[u, "\theta(M)"] & 0
\end{tikzcd}$$

de sucessões exatas tq. $\theta(R^{\oplus \Sigma})$ e $\theta(R^{\oplus \Lambda})$ são iso. $\therefore \theta(M)$ é iso.

Em sentido inverso, usemos o facto de

$$N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N'' \to 0$$

exacta e $M \in R\text{-mod} \Rightarrow$

$$M \otimes_R N' \xrightarrow{1_M \otimes \alpha} M \otimes_R N \xrightarrow{1_M \otimes \beta} M \otimes_R N'' \to 0$$

é exacta. (exercício)

<u>Def</u>: Um functor $F : R\text{-mod} \to R'\text{-mod}$ diz-se <u>aditivo</u> se é $\mathbb{Z}$-linear.

<u>Exemplo</u>: $F : \mathbb{C}\text{-mod} \to \mathbb{C}\text{-mod}$, $V \mapsto \overline{V}$ é aditivo.

NB: $M \in R\text{-mod}$

$$M \xrightarrow{\delta_M} M \oplus M \xrightarrow{\sigma_M} M$$

$$\delta_M = (1_M, 1_M) \qquad \sigma_M = 1_M + 1_M$$

Dados $\alpha, \beta : M \to N$, temos

$$\alpha + \beta = \sigma_N (\alpha \oplus \beta) \delta_M$$

Se F preserva somas diretas, então

$$F(\alpha+\beta) = F(\sigma_N) F(\alpha \oplus \beta) F(\delta_M)$$

$$= \sigma_{FN} \, F(\alpha) \oplus F(\beta) \, \delta_{FM}$$

$$= F(\alpha) + F(\beta)$$

$\therefore$ F preserva somas diretas, então F é aditivo.

Exercício: Provar F aditivo $\Rightarrow$ F preserva somas diretas.

Equações em Produtos Tensoriais:

Sejam $\{n_\lambda\}_{\lambda\in\Delta} \subset N$ geradores. Dado $t \in M\otimes_R N$. Então $\exists\, m_\lambda \in M$ t.q.

$$t = \sum_\lambda m_\lambda \otimes n_\lambda$$

Lema: Se $t=0$ $\exists\, m'_\sigma \in M$, $\sigma\in\Sigma$, e $x_{\lambda\sigma}\in R$, $\lambda\in\Delta$, $\sigma\in\Sigma$, tq

1. $\sum_\sigma x_{\lambda\sigma} m'_\sigma = m_\lambda$

2. $\sum_\lambda x_{\lambda\sigma} n_\lambda = 0 \quad \forall \sigma\in\Sigma$

NB: 1. Se $\sum_\lambda a_\lambda n_\lambda = 0$ com $a_\lambda \in R$

e $\exists\, m \in M$ t.q. $m_\lambda = a_\lambda m$, então

$$t = \sum_\lambda m_\lambda \otimes n_\lambda = \sum_\lambda m a_\lambda \otimes n_\lambda$$

$$= m \otimes \left(\sum_\lambda a_\lambda n_\lambda \right) = 0$$

NB: 2. Sejam $x_{\lambda\sigma}$ e m'_σ como no lema,

então

$$t = \sum_\lambda \left(\sum_\sigma x_{\lambda\sigma} m'_\sigma \right) \otimes n_\lambda$$

$$= \sum_\sigma \Big(\underbrace{\sum_\lambda (m'_\sigma x_{\lambda\sigma}) \otimes n_\lambda}_{\text{0 por 1.}} \Big)$$

$$= \sum_\sigma 0$$

$\square$

Dem: Consideremos uma suc. exata

$$R^{\oplus \Sigma} \xrightarrow{\alpha} R^{\oplus \Lambda} \xrightarrow{\beta} N \to 0$$

$x_{\lambda\sigma}$ tq $\quad \beta(e_\lambda) := n_\lambda$

$\alpha(e_\sigma) = \sum_\lambda x_{\lambda\sigma} e_\sigma$

Fazendo $\otimes M$, obtemos uma suc. exata

$$M \otimes_R R^{\oplus \Sigma} \xrightarrow{1\otimes\alpha} M \otimes_R R^{\oplus \Lambda} \xrightarrow{1\otimes\beta} M \otimes N \to 0$$

$$t = \sum_\lambda m_\lambda \otimes n_\lambda \implies t = 1\otimes\beta\left(\sum_\lambda m_\lambda \otimes e_\lambda\right) = \ldots$$

$$\implies \sum_\lambda m_\lambda \otimes e_\lambda \in \ker(1\otimes\beta) = \operatorname{Im} 1\otimes\alpha$$

Sejam $m_\sigma' \in M$ t.q. $1\otimes\alpha\left(\sum_\sigma m_\sigma' \otimes e_\sigma\right) =$

$$= \underbrace{\sum_\lambda m_\lambda \otimes e_\lambda}_{S}$$